SILLABO PER L'ACCESSO ALLA LM IN MATEMATICA
Università degli Studi di Milano

Questo sillabo contiene l'elenco degli argomenti svolti nei corsi della LT obbligatori per tutti gli studenti e costituisce quindi il complesso delle nozioni che ogni studente, proveniente da un qualunque altro CDL triennale, deve conoscere per potersi iscrivere alla LM Magistrale presso il nostro Ateneo.
Il sillabo è parte integrante del Regolamento del CDL Magistrale (Art. 2).

1) Argomenti trasversali, comuni a tutti i settori.
Insiemistica. Applicazioni iniettive, suriettive, biunivoche. Cardinalità. Relazioni di equivalenza.
Calcolo combinatorio. Il principio di induzione.

2) Algebra (15 cfu)
Relazioni d'ordine e reticoli. Interi e loro proprietà. Congruenze e algebra modulare.
Operazioni binarie e loro proprietà: campi, anelli, gruppi, semigruppi, monoidi.
Omomorfismi e quozienti.
Anelli fattoriali, principali, euclidei; anelli di polinomi e loro proprietà.
Moduli ed algebre.
Gruppi e loro proprietà rilevanti. Sottogruppi e laterali. Omomorfismi di gruppi.
Sottogruppi normali e gruppi quoziente. Prodotti diretti.
Gruppi lineari, gruppi di permutazioni, gruppi ciclici.
Teorema di Cayley e sue applicazioni, p-gruppi e Teoremi di Sylow.
Azioni di gruppi su insiemi: stabilizzatori, orbite, transitività, regolarità.

3) Geometria (21 cfu)
Spazi vettoriali e loro proprietà. Applicazioni lineari.
Matrici e sistemi di equazioni lineari.
Algebra lineare: base, dimensione, somme dirette, formula di Grassmann. Rango e determinante.
Spazi affini e loro proprietà. Affinità.
Endomorfismi di spazi vettoriali e loro forme canoniche. Autovettori, autovalori e polinomio minimo. Forma canonica di Jordan.
Spazi vettoriali euclidei e loro proprietà. Isometrie e gruppo ortogonale. Teoremi spettrali.
Forme bilineari e quadratiche e loro forme canoniche. Teorema di Sylvester. Spazi vettoriali pseudoeuclidei.
Geometria affine e proiettiva in spazi n-dimensionali su un campo arbitrario. Teorema fondamentale della geometria proiettiva. Proiettività e affinità. La Geometria secondo F. Klein.
Quadriche e coniche. Loro classificazione metrico-euclidea, affine, proiettiva, reale e complessa.
Duale di uno spazio vettoriale. Omomorfismi trasposti. Sottospazi annullatori e loro proprietà.
Principio di dualità in geometria proiettiva.
Topologia generale: spazi topologici e funzioni continue. Intorni, basi. Spazi prodotto e spazi quoziente. Omeomorfismi. Connessione, compattezza e separazione.
Omotopia e gruppo fondamentale.
Geometria differenziale delle curve e delle superfici negli spazi euclidei di dimensione 2 e 3.
Curvature. Forme fondamentali. Curve speciali tracciate su fogli semplici di superfici.

4) Analisi (24 cfu)
Campo reale, campo complesso e loro proprietà. Funzioni.
Spazi metrici. Insiemi limitati, insiemi aperti, insiemi chiusi, insiemi compatti, insiemi connessi.
Successioni e loro proprietà. La condizione di Cauchy. Limiti e operazioni sui limiti.
Serie numeriche e loro proprietà. Criteri di convergenza e divergenza. Operazioni sulle serie.
Limiti di funzioni. Funzioni continue tra spazi metrici e loro proprietà. Continuità uniforme.
Funzioni reali di variabile reale. Studio dettagliato dei loro grafici.
Differenziabilità e funzione derivata. Regole di derivazione. Proprietà delle funzioni derivabili.
Derivate di ordine superiore. Applicazioni del calcolo differenziale allo studio di funzioni.
Sviluppi di Taylor ed applicazioni.
Funzioni primitive e loro determinazione. Integrale di Riemann e sue proprietà. Funzione integrale e sue proprietà. Il teorema fondamentale del calcolo integrale. Integrali impropri.
Calcolo differenziale per funzioni di più variabili. Derivabilità direzionale, derivate parziali, funzione gradiente e matrice Jacobiana. Proprietà delle funzioni differenziabili. Matrice Hessiana.
Formule di Taylor per funzioni di più variabili.
Ottimizzazione libera.
Integrale multiplo secondo Riemann. Integrabilità e tecniche di riduzione per il calcolo. Esempi di calcolo su domini semplici. Cambiamento di variabili e sistemi di coordinate polari, cilindriche e sferiche.
Successioni, serie di funzioni e loro proprietà. Convergenza puntuale e uniforme. Serie di potenze.
Insiemi e raggi di convergenza. Funzioni analitiche reali.
Spazi funzionali connessi con la convergenza uniforme. Il teorema delle contrazioni.
Funzioni definite implicitamente da una equazione. Teorema del Dini. Diffeomorfismi.
Ottimizzazione vincolata.
Equazioni differenziali ordinarie del primo ordine. Il problema di Cauchy: risultati di esistenza e unicità globale e locale. Equazioni lineari a coefficienti continui, omogenee e non omogenee.
Curve in R^n . Lunghezza di una curva rettificabile. Integrale curvilineo per funzioni regolari.
Forme differenziali e loro integrazione lungo una curva in R^n. Forme differenziali chiuse ed esatte.
Calcolo del potenziale.

5) Fisica Matematica (12 cfu)
I problemi dell'esistenza, unicità e prolungabilità delle soluzioni di una equazione differenziale.
Soluzioni per serie. Il metodo delle maggioranti di Cauchy. Soluzioni di equilibrio. Linearizzazione.
Stabilità. Il teorema di Lyapounov.
Meccanica Newtoniana e suoi principi fondamentali. Caratterizzazione classica delle forze.
Equazioni cardinali. Il problema di Keplero.
Il formalismo Lagrangiano e le equazioni di Lagrange. Coordinate generalizzate. Piccole oscillazioni. Leggi di conservazione e simmetrie.
Introduzione alle equazioni classiche della fisica matematica. Il problema di Dirichlet.
a) Equazione del trasporto. Soluzione tramite riduzione a equazioni del calore, Laplace e onde.
b) Equazione delle onde in una dimensione spaziale. Deduzione. Soluzione generale dell'equazione su tutto R, su una semiretta e, con condizioni di Dirichlet, su un segmento.
c) Equazione del calore in una dimensione spaziale. Deduzione. Principio del massimo per il problema su un rettangolo nel piano. Soluzione ed unicità in questo caso. Soluzione fondamentale. Soluzione, con condizioni di Dirichlet, su un segmento. Soluzione dell'equazione sulla semiretta con condizioni dipendenti periodicamente dal tempo.
Serie di Fourier. Convergenza puntuale, uniforme ed in norma L^2. Applicazione alla soluzione dell'equazione di Laplace nel piano.
Equazioni differenziali ellittiche. Sistemi fisici descritti dall'equazione di Laplace e da quella di Poisson e soluzioni di tali equazioni.
Formule ed equazione di Green. Principio del massimo, e applicazione all'unicità delle soluzioni.

Proprietà variazionali dell'equazione.
Equazione delle onde in 3-d. Formula di Kirchoff. Conservazione dell'energia e principio di causalità. Formula di variazione delle costanti arbitrarie. Soluzione dell'equazione non omogenea. Formula dei potenziali ritardati.
Equazioni di Maxwell Lorentz per il campo elettromagnetico in interazione con una particella. Conservazione dell'energia. Potenziali elettromagnetici, equazioni delle onde in gauge di Lorentz. Formula di Hertz.

6) Fisica generale (18 cfu)
Cinematica e dinamica del punto materiale. Moti relativi.
Dinamica dei sistemi di punti materiali e del corpo rigido. Gravitazione.
Proprietà meccaniche dei fluidi.
Primo e secondo principio della termodinamica.
Gas ideali. Entropia.
Proprietà della carica elettrica e legge di Coulomb. Induzione elettrostatica. Forza, campo e potenziale elettrostatico. Cariche puntiformi e distribuzioni continue di carica. Flusso del campo. Equazioni fondamentali per il campo elettrostatico. Conduttori e condensatori. Capacità. Energia del campo elettrostatico.
Corrente elettrica continua e circuiti. Intensità e densità di corrente. Equazione di continuità. Regime stazionario. Resistenza, resistività e conduttività. Leggi di Ohm. Effetto Joule. Forza elettromotrice.
Forza di Lorentz e vettore campo magnetico B. Azioni meccaniche su circuiti percorsi da corrente stazionaria in un campo magnetico. Campo magnetico generato da correnti stazionarie e Leggi relative. Flusso di B. Campi elettrici e magnetici variabili nel tempo.
Induzione Elettromagnetica e Leggi relative. Misure di campo magnetico. Autoinduzione, autoflusso, induttanza, forza elettromotrice di autoinduzione.
Oscillazioni elettriche: circuito LC ideale. Corrente di spostamento, Legge di Ampère-Maxwell. Equazioni di Maxwell per campi elettrici e magnetici variabili nel vuoto.
Densità di energia elettromagnetica. Equazione di continuità.
Onde e tipi d’onda: trasversale, longitudinale, piana, progressiva, regressiva. Equazione di d’Alembert e principio di sovrapposizione. Onda piana armonica e sue proprietà. Onda in una corda tesa. Onde in più dimensioni: fronte d’onda, raggio, onda armonica piana, sferica, circolare, cilindrica; vettore di propagazione, funzione d’onda, potenza media, ampiezza, intensità.
Onde elettromagnetiche piane e loro proprietà. Onde armoniche, polarizzazione lineare, ellittica, circolare. Energia e intensità di un’onda elettromagnetica, vettore di Poynting e relativo teorema.
Interazione fra onde elettromagnetiche e materia carica: energia, quantità di moto, momento angolare di un’onda elettromagnetica, pressione di radiazione.

7) Analisi numerica (9 cfu)
Generazione e propagazione degli errori in un processo di calcolo. Condizionamento e stabilità nei problemi matematici, numerici e negli algoritmi. Rappresentazione dei numeri sul calcolatore. Esempi di Calcolo Scientifico.
Interpolazione e approssimazione di funzioni e di dati. Interpolazione polinomiale: forma di Lagrange, forma di Newton. Aspetti algoritmici. Stima dell'errore di interpolazione. Interpolazione nei nodi di Chebyshev. Splines lineari e cubiche. Approssimazione di dati nel senso dei minimi quadrati.
Integrazione numerica. Formule di quadratura interpolatorie. Formule di Newton-Cotes. Errore di quadratura e grado di precisione. Formule di quadratura composite. Formule Gaussiane.
Risoluzione numerica di equazioni non lineari. Metodi di base: bisezione, secanti, Newton. Iterazioni di punto fisso. Analisi di convergenza. Test d’arresto.

Analisi dell’errore e condizionamento di un sistema lineare.
a) Metodi diretti. Sistemi triangolari. Metodo di eliminazione di Gauss. Fattorizzazione LU. Pivoting. Altre fattorizzazioni.
b) Metodi iterativi. Metodi di Jacobi, Gauss-Seidel, SOR, Richardson. Splitting. Convergenza e criteri di arresto.
Approssimazione numerica di autovalori e autovettori. Localizzazione (Teoremi di Gershgorin). Il metodo delle potenze.
Laboratorio con MATLAB: Implementazione e analisi sperimentale dei metodi numerici introdotti nel corso.

8) Calcolo delle probabilità e statistica Matematica (9 cfu)
1) Modelli Probabilistici
Spazio dei campioni ed eventi aleatori. Algebre, sigma-algebre e misure di probabilità.
Spazi di probabilità.
Probabilità condizionata e formula di Bayes. Indipendenza stocastica o statistica.
Variabili aleatorie, vettori aleatori e loro proprietà.
Esperimenti dicotomici ripetuti ed indipendenti. Schema e processo di Bernoulli.
Variabile e processo di Poisson. Relativi tempi di attesa. Funzione cumulativa.
Variabili aleatorie e vettori aleatori assolumente continui. Momenti delle variabili aleatorie e loro trasformazioni. Funzione caratteristica. Distribuzioni condizionate.
Legge dei grandi numeri. Il teorema limite centrale. Somme di variabili aleatorie indipendenti
Variabile normale e chi-quadro. Approssimazione di distribuzioni discrete.
2) Campionamento e Statistiche.
Statistica descrittiva. Campioni e istogrammi. Distribuzione delle statistiche fondamentali.
Distribuzione t-student. Stime di parametri e di intervalli. Il metodo di massima verosimiglianza.
Dimensione di un campione.
3) Laboratorio (con Matlab).
Analisi ed elaborazione dei dati. Principali indici statistici: media campionaria, moda, mediana, varianza campionaria, deviazione standard campionaria, curtosi, asimmetria. Percentili, quartili e boxplot. Analisi esplorativa dei dati bivariati
Simulazione di un campione (distribuzione esponenziale, variabile aleatoria discreta, distribuzione binomiale, variabile di Poisson, Gaussiane indipendenti). Metodo del rigetto
Simulazioni di un processo stocastico (di Bernoulli, binomiale, di Poisson).

9) Informatica (6 cfu)
Hardware e software, algoritmi e programmi.
Linguaggi, traduttori, compilatori.
Linguaggio C.
Espressioni.
La programmazione strutturata: sequenza, selezione, iterazione.
Tipi elementari.
Array e stringhe.
Funzioni.
Puntatori.
Strutture, unioni ed enumerazioni.
Costruzione di un File.
Implementazione di strutture di dati.